L’homme ordinateur

Vor über 260 Jahren schrieb De la Mettrie sein wohl bekanntestes Werk „L’homme machine“. Es enthielt weltanschauliche Standpunkte, die man sowohl äußerst extrem als auch äußerst konsequent nennen konnte. Jedenfalls gaben sie den Anstoß zu weitreichenden Diskussionen und Überlegungen. Das Buch basiert auf Ähnlichkeiten, die sein Autor zwischen dem Menschen als Lebewesen und einer mehr oder weniger mechanischen Maschine sah. Analog dazu beruht die hier vorgelegte Studie auf Ähnlichkeiten, die ihr Autor zwischen dem Menschen als denkendem Wesen und einem Computer herausstellen will.

Zunächst der Computer: Wir gehen von Computern aus, die darauf programmiert wurden, Lochkartenfolgen zu lesen und nach jedem Lesevorgang entweder keine oder wieder eine Lochkartenfolge auszugeben. Uns interessiert dabei weder Umfang noch Inhalt der eingegebenen bzw. der ausgegebenen Lochkartenfolgen.

Wir bezeichnen sowohl die Eingabe als auch die Ausgabe von Lochkartenfolgen als „Information“ und zwar unabhängig davon ob diese beiden tatsächlich für einen außenstehenden Betrachter einen „Sinn“ ergeben. Der Begriff „Sinn“ einer Information spielt in diesen Betrachtungen keine Rolle. Es kommt lediglich darauf an, ob ein Computer eine und wenn ja welche Lochkartenfolge er bei Eingabe einer bestimmten Lochkartenfolge ausgibt.

Die Anzahl der Lochkarten einer Folge bezeichnen wir als „Umfang der Information“ und den Vorgang der Eingabe von Lochkartenfolgen zusammen mit der daraus resultierenden Ausgabe von Lochkartenfolgen als „Informationsaustausch“.

Um Ordnung in die Menge aller möglichen Informationsaustausche zu bringen zerlegen wir unsere Raum-Zeit-Welt in Elementarwürfel der Kantenlänge ε und der Dauer δ. Durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems in der Raum-Zeit-Welt ordnen wir nun alle Elementarwürfel abzählbar an.

Jeder an einem Informationsaustausch teilnehmende Computer muss einen gewissen Teil des Raumes unserer Welt einnehmen und jeder Ein- bzw. Ausgabevorgang muss eine gewisse Mindestzeit dauern. Wählen wir die Kantenlänge ε der Elementarwürfel und deren Dauer δ genügend klein, dann können wir für jeden möglichen Informationsaustausch erreichen, dass jedenfalls mindestens ein Elementarwürfel zur Gänze innerhalb des vom Informationsaustausch benötigten Teiles der Raum-Zeit-Welt liegt. Dieser Elementarwürfel kennzeichnet den Informationsaustausch eindeutig. Mit Hilfe der abzählbaren Anordnung aller Elementarwürfel erhalten wir somit eine abzählbare Anordnung aller möglichen Informationsaustausche.

Wir wollen jetzt den auf eine Eingabe und eine Ausgabe beschränkten Informationsaustausch auf eine Diskussion erweitern. Als Diskussion zwischen zwei Computern C_1 und C_2 bezeichnen wir einen Vorgang, bei welchem die jeweilige Ausgabe des einen Computers als Eingabe in den anderen Computers verwendet wird und umgekehrt. Dabei wollen wir auch die Möglichkeit einschließen, dass die Programmierung der Computer geändert werden kann. Die ausgegebene Lochkartenfolge eines Computers ist daher nicht mehr nur von der eingegebenen Lochkartenfolge abhängig sondern auch noch vom Zeitpunkt t in welchem die Ein- und die Ausgabe stattfinden.

Die Diskussion beginnt also mit der Ausgabe einer Lochkartenfolge F_1 durch den Computer C_1 in einem Zeitpunkt t_1 und der Eingabe von F_1 in den Computer C_2. Dieser gibt daraufhin in einem Zeitpunkt t_2 eine Lochkartenfolge $F_2 = F_2(C_2, F_1)$ aus. F_2 wiederum wird von Computer C_1 als Eingabe verwendet und führt in einem Zeitpunkt t_3 zur Ausgabe einer Lochkartenfolge $F_3 = F_3(C_1, F_2)$ und so fort. Es handelt sich nach wie vor um jeweils beliebig lange und beliebig gestaltete Lochkartenfolgen, deren Inhalte lediglich durch F_1 und durch die Programmierungen von C_1 und C_2 in den jeweiligen Zeitpunkten t_1, t_2, t_3 ... bestimmt werden.

Mit Ausnahme der Voraussetzung, dass jeder Computer in jedem Zeitpunkt auf eine eingegebene Lochkartenfolge entweder keine oder eine weitere Lochkartenfolge ausgibt wurden die Eigenschaften der Computer in keiner Weise eingeschränkt. Man kann daher als Computer in unserem Modell durchaus auch jeweils einen mit einem Lochkartenleser und einem Lochkartenschreiber versehenen Menschen einsetzen.

Wir wollen unser Modell jetzt auf eine Diskussion zwischen zwei Personen anwenden. Dabei spielt es keine Rolle ob diese Diskussion mündlich, schriftlich oder in welcher Form immer abgehalten wird. Wichtig ist, dass die Sprache der Diskussion in eine endliche Anzahl von Lochkarten „übersetzt" werden kann. Nun wollen wir auch vom „Sinn" eingegebener und ausgegebener Lochkarten sprechen. Eine endliche Lochkartenfolge F hat für eine Person P im Zeitpunkt t genau dann die Bedeutung oder den Sinn S = S(F,P,t) wenn P in t bereit ist zu sagen: „F bedeutet für mich S". Wir bemerken, dass Bedeutung oder Sinn einer Lochkartenfolge F damit nur relativ zu einer Person P und einem Zeitpunkt t erklärt ist.

Soll es zwischen zwei Personen P_1 und P_2 zu einer sinnvollen Diskussion kommen, müssen sich beide einer gemeinsamen Sprache bedienen. Für unser Lochkartenmodell bedeutet das, es sollte während der Diskussion stets $S(F,P_1,t) = S(F,P_2,t)$ für alle verwendeten Folgen F gelten. Als Beispiel wählen wir etwa den „Sinn" des Buchstabens „i" und greifen zwei der möglichen Bedeutungen heraus, nämlich:

- $i = \sqrt{-1}$,
- i ist eine Zinsintensität aus der Finanzmathematik.

Man kann davon ausgehen, dass sich die Bedeutung von i im Allgemeinen aus dem Rahmen ergibt, in dem die Diskussion abläuft.

Ein Kriterium dafür, ob dies tatsächlich der Fall ist, wird aber nur schwer anzugeben sein. Es sind ja nicht nur Irrtümer, Missverständnisse und mangelnde Kenntnisse der jeweiligen Sprache oder Materie zu berücksichtigen. In unserem Modell dürfen wir auch bewusste Unwahrheiten nicht ausschließen. Da die Diskussion aber nur zwischen P_1 und P_2 abläuft ist der allfällige „Sinn" einer Lochkartenfolge für den Autor und für den Leser dieser Studie ohne Bedeutung.

Wir wollen nun als Thema einer solchen Diskussion Beweise der Existenz überabzählbarer Mengen wählen und Widersprüche in klassischen Beweisen der Überabzählbarkeit von Mengen aufzeigen.

Ein klassischer Beweis der Überabzählbarkeit einer Menge M wird in der Form geführt, dass zu jeder abzählbaren Menge *M*, die angeblich alle Elemente von M enthält, ein „kritisches" Element $E_k \in M$ mit $E_k \notin \mathit{M}$ angegeben wird. Ein Widerspruch in einer solchen Beweisführung kann folgendermaßen gezeigt werden:

Die Angabe eines derartigen kritischen Elementes E_k ist eine mathematische Aussage, die in die Form einer Lochkartenfolge F gebracht werden kann. Von P_k, dem Kritiker der Vollständigkeit von M, wird nun verlangt, er solle zu jeder möglichen Lochkartenfolge F jeweils angeben, ob diese ein Element E $\in$ M eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt oder nicht. Da die Menge der möglichen Lochkartenfolgen abzählbar ist, erzeugt P_k durch seine Auswahl von Elementen E $\in$ M eine abzählbare Menge von Elementen. Diese Menge nennen wir M. Da sie auf Grund der Auswahl von P_k gebildet wurde gilt $M = M(P_k)$.

Wir behaupten nun, M sei eine abzählbare Menge, die alle Elemente E $\in$ M enthält. Will nun P_k die Überabzählbarkeit von M durch die Angabe eines angeblich nicht in M enthaltenen kritischen Elementes $E_k \in$ M beweisen, so müsste für dieses E_k sowohl $E_k \in M(P_k)$ [nach Definition von M durch P_k selbst] als auch $E_k \notin M(P_k)$ [wegen der von P_k behaupteten Unvollständigkeit von M] gelten. Jede das Element E_k eindeutig beschreibende Lochkartenfolge F_k enthält daher einen Widerspruch. Es ist P_k also nicht gelungen, ein kritisches Element E_k aus M, das nicht in M enthalten ist, wie gefordert eindeutig und widerspruchsfrei zu beschreiben. Sein Beweis der Überabzählbarkeit von M ist daher misslungen.